

Типовые расчеты по математике(самостоятельная домашняя работа)

Типовой расчет №1 « Предел функции»

Непосредственное вычисление пределов

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x}{x-3} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x-5}{10+2x} ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 3x^2) ;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 2x + 4}{(x-1)(x+1)} ; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2-\sqrt{x}} ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x+2}{x^2-1} ; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0,1} \frac{5x+4}{1-x} ;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2} ; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 13x + 3} ; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^3 + x + 10} ; \quad 13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 6} ;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x-6} ; \quad 15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - x - 1} ; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x+2} ; \quad 17) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x-2} ;$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x} ; \quad 19) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2-2} ; \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} ; \quad 21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x}{x+2} ; \quad 23) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x}{x+2} ; \quad 24) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2+x+4}{x-2} ;$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x^2-2}$$

Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x+2} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x} ;$$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$;
 9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$; 10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x^3 - 27}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$;
 13) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4 - 25}{x^2 - 5}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$; 16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$;
 17) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{4 - x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$;
 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2}$; 21) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}$; 22) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$; 23)
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$; 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 4x^2}{5x^3 + 8x^2}$; 25) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 7x^2 + 2x}{4x^2 - 5x - 6}$

Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$;;

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x - 7}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3}{7x - 4}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 9}{2x^2 - 3x + 5}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x + 2}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x + 1}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^4}{x^5 + x^6}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - x - 6}{3x - x^2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 6}{3x^3 + x^2 - 26}$;
 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4 - 8x^2 + 3}{5x^4 + 3x^3 + 5}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$; 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7}$; 12)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x + 8}{5x^3 + 27x^2 + x}$
 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 1}{8x^2 - 6x + 3}$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x^3}$; 17)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$; 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{2x^3 + x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{3x^2 + 5x}$;
 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x}$; 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$; 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^2 + 1}$;
 23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$; 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x^2}$; 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$;

I замечательный предел

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{tg} x}{9x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} 5x}{3 \arcsin 2x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x \cos x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 6x}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x}{3 \sin x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{\sin x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{\sin 2x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{4x^2}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x + 2 \sin x}{2x}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}$; 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 6x}{2x}$; 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x + 2 \operatorname{tg} 4x}{2x}$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$; 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 2x}$; 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \operatorname{tg} x}$;

Типовой расчет №2 «Производная функции»

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 3x + 5$; 2) $y = 4 - x^4$; 3) $y = x^4 - x^2$; 4) $y = 5x^4 - 7x^2 + x - 3$; 5) $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 9x - 5$;

6) $y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 6x - 1$; 7) $y = \frac{3x^6}{2} + 4x^5 - 2x^3 - \frac{1}{2x}$; 8) $y = 2 - \frac{x}{2} - 5x^2 - \frac{3}{x^2}$;

9) $y = \frac{x^5 + 2x^3 - 9x + 7}{x}$; 10) $y = \frac{5x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 11}{3x^2}$; 11) $y = (2x - 3)^2$;

12) $y = (2x - 3)(3x^4 + 5x - 8)$; 13) $y = 3x^{-2}$; 14) $y = 4x^{-3}$; 15) $y = 3x^{-\frac{2}{3}}$; 16) $y = 5x^{-\frac{3}{5}}$;

17) Найти $f'(-1)$, если $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$;

18) Найти $f'(0,5)$, если $f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$;

19) $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$; 20) $y = (x + 2)(2x^3 - x)$; 21) $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$; 22) $y = \frac{1 - x^5}{1 + x^5}$;
 23) $y = e^{x^2}$; 24) $y = 3x^4 \sin x$; 25) $y = 3^x - 3e^x$

II. Вычислите производные сложных функций:

1) $y = 3 \sin 5x$; 2) $y = 4 \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \arccos 3x$; 4) $y = \ln \sqrt{2x - 1}$;
 5) $y = (x^4 - x - 1)^4$; 6) $y = \sqrt{x^3 + 2x - 5}$; 7) $y = \sqrt{(1 - x^2)^2}$; 8) $y = \cos^2 x$; 9)
 $y = \sin^3 x$;
 10) $y = \ln \sin 3x$; 11) $y = \ln \sqrt{2x - 1}$; 12) $y = 3^{\sin x} - 2^{2x} + e^{5x}$; 13)
 $y = 3^{\sqrt{x}} - 4^{7x} + 3e^{2x}$;
 14) $y = \arcsin \ln x$; 15) $y = \arctg x^3$; 16) $y = \arctg \cos x$; 17) $y = 2 \ln(x + 1)$; 18) $y = -3 \ln \frac{x + 1}{3}$;
 19) $y = (x^2 - 6x + 5)^2$; 20) $y = \sqrt{x^2 - 8}$; 21) $y = \frac{1}{4} \sin 4x$; 22) $y = -x \cos 2x$; 23) $y = \ln \frac{1}{x}$;
 24) $y = e^{2\sqrt{x}} + 0,5^{-x}$; 25) $y = x e^{1 - 2x^2}$

III. Проведите исследование функций и постройте их графики:

1) $y = 8 - 2x - x^2$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 3) $y = 3 - 3x + x^3$; 4) $y = 4x^2 - x^4 - 3$;
 5) $y = x^3 - 12x$; 6) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2$; 7) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 8) $y = x \sqrt{2 - x}$; 9) $y = \ln(x^2 + 1)$;
 10) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 11) $y = x^2 \sqrt{1 + x}$; 12) $y = 2x^4 - 8x^2 + 3$; 13) $y = 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6$;
 14) $y = 3x - x^3$; 15) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; 16) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$; 17) $y = \frac{1}{5}x^5 - 1 - \frac{1}{3}x^3$;

$$18) y = 9x^3 - 9x^2 + 15x - 6; 19) y = 2x^4 - 8x^2 + 3; 20) y = x^3 - 3x^2 - 9x; 21) y = \frac{4x}{1+x^2};$$

$$22) y = 5x^3 - 3x^5; 23) y = x^4 - 2x^2; 24) y = 4x^2 - x^4; 25) y = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$$

Типовой расчет №3 «Интегральное исчисление»:

I. Непосредственное интегрирование.

$$1. \int (5x^7 - 4x^5 - 7x^3 + 8x - 9e^x - \frac{6}{x^2} + 2) dx; 2. \int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx; 3. \int (x^{\frac{2}{3}} - \sqrt{x}) dx; 4. \int \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{\cos 2x} dx; 5. \int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8) dx; 6. \int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3) dx; 7. \int (2x - 1)^3 dx; 8. \int x^3(1 + 5x) dx; 9. \int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x} dx; 10. \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx; 11. \int \frac{4x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2} dx; 12. \int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x - 4}{x^2} dx; 13. \int \frac{(3x + 1)^2}{x} dx; 14. \int \frac{dx}{1 + x}; 15. \int \frac{2x dx}{1 + x^2}; 16. \int \frac{x dx}{x^2 + 1}; 17. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5}; 18. \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 2}; 19. \int (2x - 4^x + e^{3x}) dx; 20. \int \left(\frac{2}{x} + 8e^x + 5^x - x^{\frac{3}{5}} \right) dx; 21. \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx; 22. \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx; 23. \int \frac{1 + x^2 + 3\cos^2 x}{(1 + x^2)\cos^2 x} dx; 24. \int \cos(5 - 2x) dx; 25. \int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx; 26. \int \frac{4 + \cos^3 x}{\cos^2 x} dx; 27. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; 28. \int \frac{2 dx}{3\sqrt{1 - x^2}}; 29. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}; 30. \int \frac{x^4 dx}{1 + x^2}; 31. \int \frac{4 + \cos^3 x}{\cos^2 x} dx; 32. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; 33. \int \frac{2 dx}{3\sqrt{1 - x^2}}; 34. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}; 35. \int \frac{x^4 dx}{1 + x^2};$$

II. Способ подстановки.

1. $\int (7-2t)^3 dt$; 2. $\int (5u-1)^3 du$; 3. $\int (1+x^5)^7 x^4 dx$; 4. $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$; 5. $\int 4(x^4+5)^2 x^3 dx$; 6. $\int x \sin x^2 dx$; 7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; 9. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x}}$;
10. $\int \sin^2 x \cos x dx$;
11. $\int \cos^3 x dx$; 12. $\int 4 \sin^3 x dx$; 13. $\int (\cos^3 x + 1)^2 \sin x dx$; 14. $\int \operatorname{tg} x dx$; 15. $\int \operatorname{ctg} x dx$;
16. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; 17. $\int \frac{dx}{5+x^2}$; 18. $\int \frac{dx}{25+36x^2}$; 19. $x=2$; 20. $y=9-x^2$;
21. $\int \frac{\sin 3x dx}{2+\cos 3x}$; 22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$; 23. $\int (x^3-1)^4 x^2 dx$; 24. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx$; 25. $\int x \sqrt{x-4} dx$

III. Способ интегрирования по частям.

1. $\int x \cos x dx$; 2. $\int x e^x dx$; 3. $\int x^5 \ln x dx$; 4. $\int x e^{2x} dx$; 5. $\int x^2 \sin x dx$; 6. $\int \operatorname{arctg} x dx$;
7. $\int x \sin x dx$; 8. $\int x \ln x dx$; 9. $\int (4x^3+6x-7) \ln x dx$; 10. $\int x \sin 2x dx$; 11. $\int x \cos 3x dx$;
12. $\int \ln x dx$; 13. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; 14. $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$; 15. $\int e^x \ln(1+3e^x) dx$; 16. $\int x 3^x dx$;
17. $\int x^2 e^{3x} dx$; 18. $\int x \ln(x^2+1) dx$; 19. $\int x^2 \sin 4x dx$; 20. $\int x \ln^2 x dx$; 21. $\int \arccos x dx$;

22. $\int \arcsin x dx$; 23. $\int x \sin \frac{x}{3} dx$; 24. $\int x e^{-x} dx$; 25. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

IV. Вычисление определенных интегралов.

1. $\int_{-1}^1 (2x+1) dx$; 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$; 3. $\int_0^2 3e^{3x} dx$; 4. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx$; 5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$;

6. $\int_{-1}^1 (2x+3x^2+4x^3+5x^4) dx$; 7. $\int_1^5 ((x-3)^2-4) dx$; 8. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$;

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{(\sin x)^2} + 3 \cos x \right) dx$; 10. $\int_{-1}^2 (5x^2+3) dx$; 11. $\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) dx$;

12. $\int_1^2 \left(\frac{-2}{x^3} \right) dx$; 13. $\int_{-2}^0 (0,5x+1)^5 dx$; 14. $\int_{-1}^0 (2x+1)^4 dx$; 15. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$; 16. $\int_1^2 \left(\frac{3x^2}{x^3} \right) dx$;

17. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1-2\sin^2 2x) dx$; 18. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x \cos 3x dx$; 19. $\int_0^1 (e^{-x}+1)^2 dx$;

20. $\int_0^6 \frac{dx}{0,5x+1}$; 21. $\int_1^3 \frac{3}{3x-2} dx$; 22. $\int_2^4 \frac{dx}{3-2x}$; 23. $\int_2^8 \frac{dx}{0,5x-5}$; 24. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx$;

25. $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$.

V. Применение определенного интеграла.

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1. Осью Ox , прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$; 2. $y^2=9x$, $x=16$, $x=25$, $y=0$;

3. $y=-x^2+4$ и $y=0$; 4. $y=x^2$, $y=1/x$, $x \in [1; e]$; 5. $y^2=x$, $y=x^2$;

6. $y=8+2x-x^2$, $y=x+6$;

7. $xy = 6$ и $x + y - 7 = 0$; **8.** $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$; **9.** $y = x^2 - 1, y = 3$; **10.** $y = 5 - x^2, y = 1$;

11. $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - x$; **12.** $y = x^2 + 4x + 4, y = 4 + x$; **13.** $y = 4x - x^2, y = x, y = 0$;

14. $y = x^2 + 4x, y = x, y = 0$; **15.** $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; **16.** $y = \sin x, y = -\sin x, 0$

$\leq x \leq \frac{3\pi}{2}$;

17. $y = \frac{8}{x^2}, y = x, y = 4, x = 0$; **18.** $y = -\frac{4}{x^2}, y = -4, y = -\frac{1}{2}x, x = 0$; **19.** $y = x^2 + 2, y = 4 - x$; **20.** $y = x^2 + 2, y = 4 + x$; **21.** $y = -x^2 - 4x, y = 4 + x$; **22.** $y = 4x - x^2, y = 4 - x$; **23.** $y = \frac{4}{x^2}, y = -3x + 7$;

24. $y = \frac{9}{x^2}, y = -4x + 13$; **25.** $y = \frac{5}{x}, y = 6 - x$.